2교시 A형

1. 다음은 함수와 관련한 수학사 자료를 순서 없이 제시한 것이다. (가)~(마)를 함수 개념이 발생한 순서대로 배열하시오. [2점]

(가)	고대 바빌로니아나 그리스에서 천문학을 연구했던 사람들은 태양, 달, 행성 등의 변화를 관찰하여 수표를 작성하였다. 이시기 사람들은 수표를 사용하여 천체 운동을 서술하고 주기성을 발견하였다. 삼각함수의 기원을 이 시기에서 찾을 수 있다.
(나)	비에트(F. Viète)가 문자를 사용하는 방식을 발전시키고 데카르트(R. Descartes)가 해석기하학을 창안한 것에 기초하여 함수를 대수적으로 연구하게 되었다. $f(x)$라는 기호를 처음으로 사용한 오일러(L. Euler)는 변수와 상수가 결합된 방식에 따라 함수를 분류했다. 이 시기에 이르러 독립변수와 종속변수의 구분이 명확해졌다.
(다)	해석학을 엄밀하게 만들기 위해 함수의 연속성과 미분가능성에 대한 연구가 이루어졌다. 데데킨트(R. Dedekind), 칸토어(G.Cantor) 등이 실수의 구조를 엄밀하게 하여 해석학을 발전시켰다. 부르바키(Bourbaki) 학파는 집합론에 기초하여 '순서쌍의 집합의 부분집합'이 어떤 특정한 조건을 만족할 때 그 부분집합을 함수로 정의하였다.
(라)	이 당시 학자들은 주로 운동을 나타내는 곡선을 중심으로 곡선의 접선, 곡선 아래의 넓이, 곡선의 길이, 곡선을 따라 움직이는 점의 속도 등을 연구하였다. 갈릴레이(G. Galilei)는 등가속도 운동을 하는 물체가 움직인 거리와 시간의 관계를 연구하였는데, 과학에서 이루어진 운동에 대한 연구가 함수를 개념화하는 데 기여하였다.
(마)	푸리에(Fourier) 급수나 디리클레(Dirichlet) 함수에 대한 연구결과로 인하여 함수 개념을 새롭게 정의할 필요성이 생겨났다. 일가성과 임의성을 가지는 대응으로 함수를 정의함으로써 한변수의 각 값에 다른 변수의 유일한 값이 대응되느냐 되지 않느냐는 논리적 조건에만 관심을 갖게 되었다.

A형 기입형 1번 - 함수의 역사적 발달

[답안]

(가) ⇨ (라) ⇨ (나) ⇨ (마) ⇨ (다)

(가) 전 함수 단계

(나) 대수적 함수 단계

(다) 집합적 함수 단계

(라) 기하적 함수 단계

(마) 논리적 함수 단계

5. 두빈스키(E. Dubinsky)는 스키마 구성을 설명하는 APOS 이론을 제안하였다. A는 행동(Action), P는 과정(Process), O는 대상 (Object), S는 스키마 (Schema)를 의미한다. 다음은 수학교육론 강의 시간에 교수가 APOS 이론을 설명하기 위해 제시한 두 고등학생의 학습 일지이다.

> [민수의 학습 일지]
> 나는 $(5x^3+x^2-4x-2)\div(x-2)$와 같은 형태의 나눗셈 문제를 조립제법으로 풀 수 있다. 그런데 선생님께서 오늘 수업 시간에 조립제법에서 사용하는 여러 값을 차례로 입력하면 나눗셈 결과가 나오는 컴퓨터 프로그램을 보여주시면서, 프로그램 안에 포함된 계산 과정을 설명해보라고 하셨다. 이 컴퓨터 프로그램을 잘 모르는 내 친구는 잘 설명했는데, 이 프로그램을 잘 다루는 나는 설명하지 못해서 속상했다.
>
> [재희의 학습 일지]
> 나는 오늘 수업 시간에 함수와 관련된 어려움을 겪었다. "두 함수 f, g의 합 f+g를 두 수의 합 2+1처럼 생각하면 된다."라고 하신 선생님 말씀이 잘 이해되지 않았다. 내가 아는 함수는 x의 값을 넣으면 y의 값이 나오는 것이었는데…. "함수 f나 g를 2나 1과 같은 수처럼 다룰 수 있을까?"라는 의문이 들었다.

[민수의 학습 일지]에 서술된 상황을 '행동' 및 '과정'과 관련지어 설명하고, [재희의 학습 일지]에 서술된 상황을 '과정' 및 '대상'과 관련지어 설명하시오. [4점]

A형 서술형 5번- APOS 이론

[답안]

프로그램을 잘 다루는 민수는 여러 가지 값을 입력하여 결과 값만 얻을 수 있는, 즉 각각의 절차에 얽매이지 않는 행동의 단계이고, 입력된 값에 따라 나눗셈의 결과가 나머지라는 것을 인식하는 친구의 상태는 과정의 단계이다.

함수를 하나의 집합으로 간주하여 집합에 대한 조작을 할 수 있는, 즉 함수를 대상으로 보는 상태인 선생님의 설명이 함수를 입력과 출력으로 보는 과정의 상태인 재희에게는 의문이 들 수 있다.

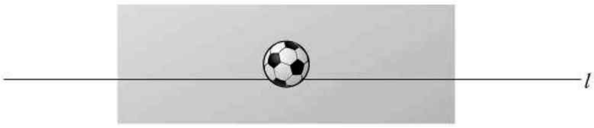
6. 다음은 윤 교사가 고등학교 수학 '도형의 방정식' 단원에서 사용한 활동 과제 중 3가지를 나타낸 것이다.

(1) 다음 [그림 1], [그림 2], [그림 3]은 축구공이 골라인을 나타 내는 직선 l을 지나가는 상황을 차례로 찍은 사진이다. [그림 1], [그림 2], [그림 3]에서 각각 직선 l을 x축으로 하여 좌표축을 설정하고 축구공을 나타내는 원을 식으로 표현하시오.

※ 준비물: 삼각자

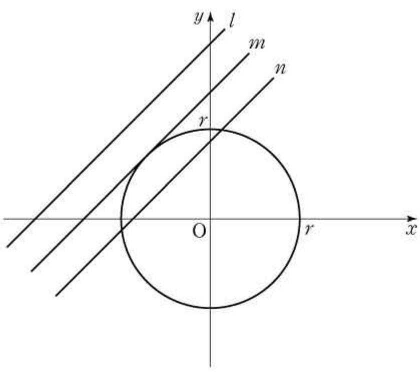
[그림 1]

[그림 2]



[그림 3]

(2) 좌표평면에서 원과 직선의 위치 관계를 알아보시오.



(3) 원 $x^2+y^2=r^2$과 직선 $y=px+q$의 위치 관계를 이차방정식의 판별식을 이용하여 설명하시오.

트레퍼스(A. Treffers)가 제시한 수평적 수학화와 수직적 수학화의 의미를 설명하고, 윤 교사의 활동 과제를 수평적 수학화와 수직적 수학화의 관점에서 분석하여 서술하시오. [4점]

A형 서술형 6번 – 수학화

[답안]

현실 내의 문제 장면을 형식적인 수학적 처리가 가능하도록 변환하는 것이 수평적 수학화이고, 수직적 수학화는 좀 더 높은 수학적 처리가 가능하도록 하는 것이다.

윤교사는 원과 직선사이의 관계를 지도하기 위해 축구공과 골라인이라는 현실 세계의 문맥을 직관적으로 탐구하는 과정을 거쳐 골라인을 좌표축으로, 축구공을 원의 방정식으로 표현하여, 좌표평면에서 직선과 원의 방정식의 관계를 수학적으로 변환하는 수평적수학화를 거쳐 좀 더 추상적이고 형식적인 수학적 처리가 가능하도록 하여 원과 직선의 관계를 이차방정식의 판별식을 이용한 수직적 수학화를 통해 지도하고자 한다.

3교시 B형

1. 다음은 라카토스(I. Lakatos)의 준경험주의 수리철학에 대한두 교사의 대화이다.

> 이 교사 : 라카토스에 따르면 수학적 지식은 반증되기 전까지 잠정적으로 참이며, 증명은 원래의 추측을 부분 추측으로 분해하는 사고 실험이에요.
> 김 교사 : 수학적 추측이 증명되었을 때 그 추측을 반박하는 전면적 반례가 등장하면 어떻게 하나요?
> 이 교사 : 대응하는 방식이 여러 가지가 있는데요. 한 방식은 ㉠ <u>이미 증명된 추측은 그대로 두고 오히려 반례가 잘못되었다고 보아 원래의 추측을 존속</u>시키는 거예요. 이 방식은 반례와 관련된 개념을 추측이 성립하는 영역 밖으로 몰아내는 것에 주로 관심을 두어 개념을 재정의하지요.
> 김 교사 : 또 다른 방식은 어떤 것이 있나요?
> 이 교사 : ㉡ <u>전면적 반례가 출현하게 된 원인이 되는 부분 추측을 찾아 원래의 추측에 합체</u>시키고 증명과 추측을 개선하는 방식이 있어요. 이 방식에서 전면적 반례는 동시에 국소적 반례도 되지요. 이 방식을 통해 발견과 정당화의 논리가 분리되지 않고 하나로 통합될 수 있어요.

전면적 반례에 의해 추측이 비판되었을 때 대응하는 방식 ㉠과 ㉡을 라카토스가 제시한 용어로 순서대로 쓰시오. [2점]

B형 기입형 1번 - 라카토스

[답안]

㉠ 괴물배제법

㉡ 보조정리 합체법

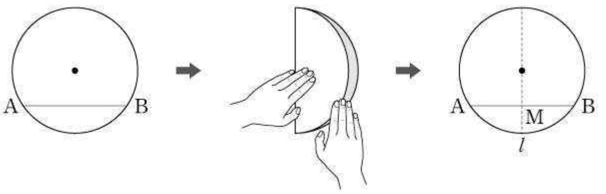
3. 원의 현에 관한 성질 중 한 가지를 지도하기 위해 교사가 〈자료 1〉과 〈자료 2〉를 개발하였다.

〈자료 1〉

① 원 모양의 종이에 현 AB를 그린다.

② 점 A와 점 B가 겹쳐지도록 접었다가 펼친다.

③ ②에서 접은 선을 l이라 하고, l과 현 AB가 만나는 점을 M이라고 한다.



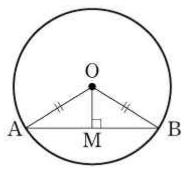
질문 : 직선 l이 원의 중심을 지나는가?

직선 l이 현 AB와 이루는 각의 크기는 얼마인가?

AM과 BM의 길이를 비교하시오.

〈자료 2〉

원 O의 중심에서 현 AB에 내린 수선의 발을 M이라고 하면 △OAM과 △OBM에서



OA=OB(반지름)

∠OMA=∠OMB 90°

OM은 공통

이므로 직각삼각형의 합동 조건에 의하여

△OAM≡△OBM이다.

따라서 AM=BM이다.

이로부터 다음을 알 수 있다.

(㉠)

〈자료 1〉과 〈자료 2〉를 통해 교사가 공통으로 가르치려는 원의 현에 관한 성질 ㉠을 서술하시오. 그리고 〈자료 1〉과 〈자료 2〉 에서 사용한 정당화 방법이 무엇인지 각각 쓰고, 두 자료를 학생 수준에 맞게 수업에서 어떻게 활용할지 서술하시오. [4점]

B형 서술형 3번 – 현의 지도 수업상황

[답안]

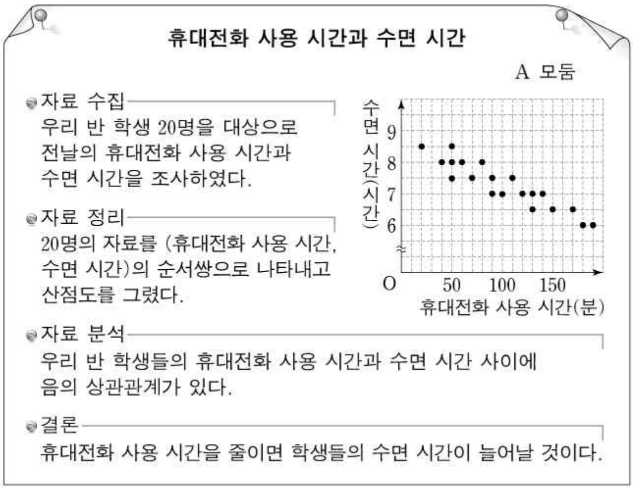
㉠ 원의 중심에서 현에 내린 수선은 그 현을 이등분한다.

<자료1> : 경험적 정당화(귀납추론)

<자료2> : 형식적 정당화(연역추론)

학생들의 인지수준과 흥미를 고려하여 <자료1>과 같이 경험적 정당화를 통한 추론 활동으로 기하적 성질을 이해하도록 지도한 다음에, 이해한 성질의 타당성에 대해 조사하고자 하는 필요성을 느낀 후, 증명을 하기 위해 익숙해야 하는 용어와 기호의 사용이나 형식논리 규칙을 학생들의 수준에 맞게 이해시키면서 <자료2>와 같이 지도하는 것이 바람직하다.

4. 박 교사는 상관관계를 지도하는 수업 시간에 학생들에게 '휴대전화 사용 시간과 수면 시간의 상관관계'를 포스터로 제작하도록 하였다. A 모둠 학생들이 만든 포스터는 다음과 같다.



박 교사는 프로젝트 평가 방법을 사용하여 학생들의 포스터를 다음의 항목에 대해 평가할 계획이다.

평가 항목	(1) 자료를 적절한 방법으로 수집하였는가?
	(2) 자료를 조사 목적에 맞게 정리하였는가?
	(3) 자료를 옳게 분석하였는가?
	(4) 결론이 적절한가?

이 수업의 평가 방법으로 프로젝트 평가가 적절한 이유를 설명 하시오. 그리고 평가 항목 (3)에 따라 A 모둠 포스터의 '자료 분석'을, 평가 항목 (4)에 따라 A 모둠 포스터의 '결론'을 평가하여 그 결과를 각각 서술하시오. [4점]

B형 서술형 4번 - 중3 통계 / 평가

[답안]

상관관계를 지도하기 위해 '휴대 전화 사용시간과 수면 시간의 상관관계'라는 특정한 주제로, 자료를 수집, 정리, 분석, 종합, 해결하는 과정과 결과를 평가 할 수 있기 때문에 프로젝트 평가로 적절하다.

학생들의 휴대전화 사용 시간이 많을수록 수면시간은 적으므로 휴대전화 사용 시간과 수면시간은 음의 상관관계가 있다고 분석한 것은 적절하다.

음의 상관관계가 있다는 것은 반대로의 관계가 있는 것이기 때문에 학생들의 휴대 전화 사용시간을 줄인다면 수면시간이 늘어날 수 있다고 추론 한 것은 적절하다.

5. 다음은 김 교사의 교수·학습 지도안에 대하여 교사들이 나눈 대화이다.

김 교사 : 교수·학습 지도안을 다음과 같이 작성해 보았습니다.

<table>
<tr><td>학습 목표</td><td>무리수의 개념을 이해한다.</td></tr>
<tr><td>단계</td><td>교수·학습 활동</td></tr>
<tr><td>도입</td><td>◦준비 학습 : 유리수의 정의를 상기한다.
◦동기 유발 : 실생활에서 무리수의 예를 보여주는 동영상을 시청한다.
◦본시 학습 목표를 확인한다.</td></tr>
<tr><td>전개</td><td>◦스프레드시트를 이용하여 $\sqrt{2}$가 순환하지 않는 무한소수임을 설명한다.
<table>
<tr><th></th><th>A</th><th>B</th></tr>
<tr><td>1</td><td>x</td><td>x^2</td></tr>
<tr><td>2</td><td>1.3</td><td>1.69</td></tr>
<tr><td>3</td><td>1.4</td><td>1.96</td></tr>
<tr><td>4</td><td>1.5</td><td>2.25</td></tr>
<tr><td>5</td><td>1.41</td><td>1.9881</td></tr>
<tr><td>6</td><td>1.42</td><td>2.0164</td></tr>
<tr><td>11</td><td>1.41421</td><td>1.9999899241</td></tr>
<tr><td>12</td><td>1.41422</td><td>2.0000182084</td></tr>
</table>
◦무리수와 실수를 정의한다.
◦무리수 $\sqrt{2}$를 수직선에 나타내는 방법을 설명한다.</td></tr>
<tr><td>정리</td><td>◦본시 학습 내용을 정리한다.</td></tr>
</table>

최 교사 : $\sqrt{2}$가 순환하지 않는 무한소수임을 설명하기 위해 공학적 도구를 이용하였네요. 2015 개정 수학과 교육과정에 이에 대한 근거가 있나요?

김 교사 : 네, ㉠ 정보 처리 능력을 함양하기 위한 교수·학습 방법에 명시된 내용이 있습니다.

최 교사 : 그렇군요. 저도 수업 시간에 스프레드시트를 이용한 적이 있는데, ㉡ 학생들이 $\sqrt{2}$가 순환하지 않는 무한소수라는 것에는 관심을 두지 않고 "선생님, 무슨 식을 입력하였기에 x에 수를 넣으면 x^2이 계산되는 건가요? 스프레드시트 다루는 방법 좀 알려주세요."라는 말을 해서 난감했던 적이 있었습니다.

김 교사 : 그런 점을 주의하여 수업을 하려고 합니다.

김 교사가 교수·학습 지도안에서 스프레드시트를 이용한 근거를 ㉠의 구체적인 내용으로 제시하시오. 그리고 브루소(G. Brousseau)의 교수학적 상황론에서 ㉡을 설명할 수 있는 극단적인 교수 현상을 쓰고, 그 현상을 ㉡의 상황과 관련지어 설명하시오. [4점]

B형 서술형 5번 - 공학적 도구 / 극단적인 교수현상

[답안]

계산 능력 배양을 목표로 하지 않는 교수 • 학습 상황에서의 복잡한 계산 수행, 수학의 개념, 원리, 법칙의 이해, 문제 해결력 향상 등을 위하여 계산기, 컴퓨터, 교육용 소프트웨어 등의 공학적 도구를 이용할 수 있게 한다.

메타인지이동

무리수 개념에 대한 이해를 돕고자 교사가 사용한 교수학적 보조수단인 스프레드시트에 학생들의 관심이 집중되고 있기 때문에 메타인지이동이 일어난 교수학습 상황이다.