

3. 3차원 유클리드 공간 \mathbb{R}^3 에서 곡선

$$\gamma(t) = (2t - \cos t, t + \sin t, 2t + 1) \quad (0 < t < 2\pi)$$

위의 점 $\gamma(t_0)$ 에서의 접벡터(tangent vector)가 벡터 $(6, 2, 4)$ 와
평행하다. t_0 의 값과 $t = t_0$ 일 때 곡선 γ 의 비틀림률(열률, 꼬임률,
torsion)을 각각 구하시오. [2점]

4. 대칭군(symmetric group) S_5 와 덧셈 순환군(additive cyclic
group) \mathbb{Z}_{12} 의 직접곱(직적, direct product) $S_5 \times \mathbb{Z}_{12}$ 에 대하여,

S_5 의 원소 $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 4 & 5 & 1 & 3 \end{pmatrix}$ 의 위수(order)와 $S_5 \times \mathbb{Z}_{12}$ 의 원소 $(\sigma, 9)$ 의
위수를 각각 구하시오. [2점]

5. 두빈스키(E. Dubinsky)는 스키마 구성을 설명하는 APOS 이론을 제안하였다. A는 행동(Action), P는 과정(Process), O는 대상(Object), S는 스키마(Schema)를 의미한다. 다음은 수학교육론 강의 시간에 교수가 APOS 이론을 설명하기 위해 제시한 두 고등학생의 학습 일지이다.

민수의 학습 일지

나는 $(5x^3 + x^2 - 4x - 2) \div (x - 2)$ 와 같은 형태의 나눗셈 문제를 조립제법으로 풀 수 있다. 그런데 선생님께서 오늘 수업 시간에 조립제법에서 사용하는 여러 값을 차례로 입력하면 나눗셈 결과가 나오는 컴퓨터 프로그램을 보여주시면서, 프로그램 안에 포함된 계산 과정을 설명해보라고 하셨다. 이 컴퓨터 프로그램을 잘 모르는 내 친구는 잘 설명했는데, 이 프로그램을 잘 다루는 나는 설명하지 못해서 속상했다.

재희의 학습 일지

나는 오늘 수업 시간에 함수와 관련된 어려움을 겪었다. “두 함수 f, g 의 합 $f+g$ 를 두 수의 합 $2+1$ 처럼 생각하면 된다.”라고 하신 선생님 말씀이 잘 이해되지 않았다. 내가 아는 함수는 x 의 값을 넣으면 y 의 값이 나오는 것이었는데... “함수 f 나 g 를 2나 1과 같은 수처럼 다룰 수 있을까?”라는 의문이 들었다.

민수의 학습 일지에 서술된 상황을 ‘행동’ 및 ‘과정’과 관련지어 설명하고, **재희의 학습 일지**에 서술된 상황을 ‘과정’ 및 ‘대상’과 관련지어 설명하시오. [4점]

6. 다음은 윤 교사가 고등학교 수학 ‘도형의 방정식’ 단원에서 사용한 활동 과제 중 3가지를 나타낸 것이다.

(1) 다음 [그림 1], [그림 2], [그림 3]은 축구공이 골라인을 나타내는 직선 l 을 지나가는 상황을 차례로 찍은 사진이다. [그림 1], [그림 2], [그림 3]에서 각각 직선 l 을 x 축으로 하여 좌표축을 설정하고 축구공을 나타내는 원을 식으로 표현하시오.

※ 준비물: 삼각자



[그림 1]

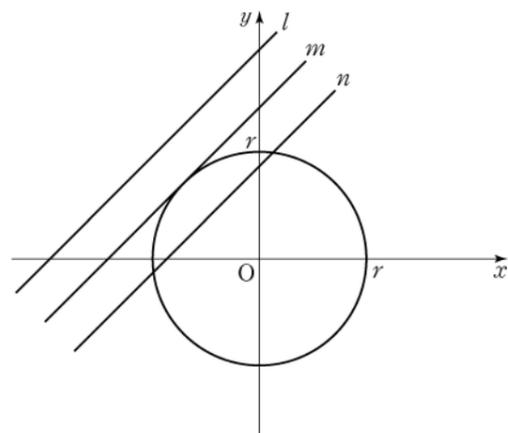


[그림 2]



[그림 3]

(2) 좌표평면에서 원과 직선의 위치 관계를 알아보시오.



(3) 원 $x^2 + y^2 = r^2$ 과 직선 $y = px + q$ 의 위치 관계를 이차방정식의 판별식을 이용하여 설명하시오.

트레퍼스(A. Treffers)가 제시한 수평적 수학과 수직적 수학의 의미를 설명하고, 윤 교사의 활동 과제를 수평적 수학과 수직적 수학의 관점에서 분석하여 서술하시오. [4점]

7. 합동방정식 $x \equiv 25^{99} \pmod{19 \cdot 13}$ 과 연립합동방정식

$\begin{cases} x \equiv a \pmod{19} \\ x \equiv b \pmod{13} \end{cases}$ 이 동치가 되도록 하는 정수 a, b 의 값을 각각

구하시오. 또한 합동방정식의 정수해 x 의 값을 풀이 과정과 함께 쓰시오. (단, $0 \leq a < 19, 0 \leq b < 13, 0 \leq x < 247$) [4점]

8. 점화식

$$a_0 = 1, a_n + a_{n-1} = (-1)^n \quad (n \geq 1)$$

을 만족하는 수열 $\{a_n\}$ 의 생성함수(generating function) $g(x)$ 를 풀이 과정과 함께 쓰시오. 또한 함수

$$f(x) = \begin{cases} g(x), & -\frac{1}{3} < x < 1 \\ 0, & \text{그 외의 경우} \end{cases}$$

가 연속확률변수 X 의 확률밀도함수일 때, 확률변수 X 의 기댓값을 풀이 과정과 함께 쓰시오. [4점]

9. 정의역이 $\{x \in \mathbb{R} \mid -1 < x < 1\}$ 인 함수 $f(x) = \frac{e^x - 1}{1-x}$ 의 $x=0$ 에서의 3차 테일러 다항식을 구하시오. 또한 복소평면에서 원점을 중심으로 하고 반지름의 길이가 $\frac{1}{2}$ 인 원을 시계반대방향으로 한 바퀴 도는 곡선 C 에 대하여 선적분 $\int_C \frac{e^z - 1}{z^4(1-z)} dz$ 의 값을 풀이 과정과 함께 쓰시오. [4점]

10. 실수체 \mathbb{R} 의 원소 $\alpha = \sqrt{2 - \sqrt{2}}$ 에 대하여 환준동형사상(ring homomorphism) $\varphi_\alpha : \mathbb{Q}[x] \rightarrow \mathbb{R}$ 를 $\varphi_\alpha(f(x)) = f(\alpha)$ 로 정의하자. 사상 φ_α 의 핵(kernel)을 K 라 할 때, $K = \langle p(x) \rangle$ 를 만족하는 최고차항의 계수가 1인 기약다항식(irreducible polynomial) $p(x)$ 를 풀이 과정과 함께 쓰시오. 또한 잉여환(상환, factor ring, quotient ring) $\mathbb{Q}[x]/K$ 의 원소 $(x-2)+K$ 의 곱셈에 대한 역원을 $g(x)+K$ 라 할 때, $\deg g(x) < \deg p(x)$ 인 다항식 $g(x)$ 를 풀이 과정과 함께 쓰시오. (단, $\mathbb{Q}[x]$ 는 유리수체 \mathbb{Q} 위의 다항식환이고, $\deg h(x)$ 는 다항식 $h(x)$ 의 차수이다.) [4점]

11. 실수 전체의 집합 \mathbb{R} 의 보통 위상을 \mathcal{J}_u 라 하고,

함수 $f_i: \mathbb{R} \rightarrow (\mathbb{R}, \mathcal{J}_u)$ ($i=1, 2$)를

$$f_1(x) = \lfloor x \rfloor, \quad f_2(x) = \lfloor -x \rfloor$$

로 정의하자. 집합

$$\{f_1^{-1}(U) \mid U \in \mathcal{J}_u\} \cup \{f_2^{-1}(U) \mid U \in \mathcal{J}_u\}$$

을 부분기저(subbase, subbasis)로 하여 생성된 \mathbb{R} 의 위상을 \mathcal{J} 라 정의하자. 위상공간 $(\mathbb{R}, \mathcal{J})$ 에서 $\sqrt{2}$ 를 포함하는 성분(연결성분, component, connected component)을 풀이 과정과 함께 쓰시오.

또한 $(\mathbb{R}, \mathcal{J})$ 에서 집합 $\left[\frac{1}{2}, 2\right]$ 의 내부(interior)와 폐포(closure)를

구하시오. (단, $\left[\frac{1}{2}, 2\right] = \left\{x \in \mathbb{R} \mid \frac{1}{2} \leq x \leq 2\right\}$ 이고,

$\lfloor x \rfloor$ 는 x 를 넘지 않는 최대 정수이다.) [4점]

12. 실수 전체의 집합에서 미분가능한 함수 f 에 대하여

$$S = \{x \mid f(x) = 0, -1 \leq x \leq 1\}$$

라 하자. 다음 명제 P 의 대우명제를 쓰고, P 를 증명하시오. [4점]

P : 모든 $x \in \mathbb{R}$ 에 대하여 $f(x) \neq 0$ 이거나 $f'(x) \neq 0$ 이면
 S 는 유한집합이다.

<수고하셨습니다.>