2020학년도 대비 실전 모의고사

✓ 전공 A

1. 수학교육론 기입형 [2점]

2. 기입형 [2점]

$$\begin{aligned}\int \frac{1}{1+\sin x}\,dx &= \int \frac{1}{1+\sin x}\frac{1-\sin x}{1-\sin x}\,dx = \int \frac{1-\sin x}{1-\sin^2 x}\,dx \\ &= \int \frac{1-\sin x}{\cos^2 x}\,dx = \int \frac{1}{\cos^2 x}\,dx - \int \frac{\sin x}{\cos^2 x}\,dx \\ &= \int \sec^2 x\,dx - \int \sec x \tan x\,dx = \tan x - \sec x + C\end{aligned}$$

$$\int_0^{\pi/4} \frac{1}{1+\sin x}\,dx = \tan x - \sec x\Big|_0^{\frac{\pi}{4}} = 2-\sqrt{2}$$

3. 기입형 [2점]

$2020 = 2^2 \times 5 \times 101$ 이므로 중국인의 나머지 정리에 의해서

$$\mathbb{Z}_{2020} \cong \mathbb{Z}_4 \times \mathbb{Z}_5 \times \mathbb{Z}_{101}$$

이고,

$$U(2020) \cong U(4)\times U(5)\times U(101) \cong C_2 \times C_4 \times C_{100}$$

이다.

$U(2020)$ 에서 위수가 30 의 약수인 수는

$$(30,2)(30,4)(30,100) = 2\cdot 2\cdot 10 = 40$$

이다.

패턴 위수가 n 인 순환군 G 에는 위수가 d 의 약수인 원소가 (d,n) 개 존재한다.

패턴 순환군 $G_1, G_2, \ldots, G_k$ 의 위수가 각각 $n_1, n_2, \ldots, n_k$ 이다.
군 $G_1 \times G_2 \times \cdots \times G_k$ 에는 위수가 d 의 약수인 원소가

$$(d,n_1)(d,n_2)\cdots(d,n_k)$$

개 존재한다.

4. 기입형 [2점]

$G = 1+u^2$ 이므로 $K = -\dfrac{1}{\sqrt{1+u^2}}\dfrac{\partial^2\sqrt{1+u^2}}{\partial u^2} = \dfrac{-1}{\left(1+u^2\right)^2}$ 이다.

패턴 곡면조각 $\mathbf{x}(u,v)$ 의 제1기본형식이

$$I = ds^2 = du^2 + Gdv^2$$

일 때, 곡면의 점 $\mathbf{p} = \mathbf{x}(u,v)$ 에서 가우스곡률은

$$K = -\frac{1}{\sqrt{G}} \frac{\partial^2 \sqrt{G}}{\partial u^2}$$

이다.

5. 수학교육론 서술형 [4점]
6. 수학교육론 서술형 [4점]

7. 서술형 [4점]

f 가 $x=0$ 에서 연속이므로 $\forall \varepsilon > 0$, $\exists \delta > 0$, $|x| < |x-0| < \delta$ 이면

$$|f(x)| = |f(x) - 0| < \varepsilon$$

이다. $|x-y| < \delta$ 이면 $y = x+t$, $x = y-t$, $|t| < \delta$ 이고

$$\begin{aligned} f(y) - f(x) &= f(x+t) - f(x) \\ &\le f(x) + f(t) - f(x) = f(t) < \varepsilon \\ f(x) - f(y) &= f(y-t) - f(y) \\ &\le f(y) + f(-t) - f(y) = f(-t) < \varepsilon \end{aligned}$$

이다. 따라서 $|f(x) - f(y)| < \varepsilon$ 이고 f 는 균등연속함수이다.

8. 서술형 [4점]

$f(x) = \int_0^x xg(t)\,dt - \int_0^x t\,g(t)\,dt = x\int_0^x g(t)\,dt - \int_0^x t\,g(t)\,dt$ 이고,

$g(t)$ 와 $t\,g(t)$ 는 연속함수이므로 미적분학의 기본정리에 의하여

$$f'(x) = \int_0^x g(t)\,dt + x\,g(x) - xg(x) = \int_0^x g(t)\,dt$$

이다. 미적분학의 기본정리를 다시 적용하면

$$f''(x) = g(x) \quad \text{연속함수}$$

이므로 $f \in C^2$ 이다.

9. 서술형 [4점]

만일 $\exists K < G$, $|K| = 7^3 \times 11^3$, $K \neq H$ 이면 $H \cap K$ 는 H 와 K 의 진부분군이므로

$$|H \cap K| < 7^3 \times 11^3 \text{ 이고 } 7^3 \times 11^3 \text{ 의 약수}$$

이다. 따라서 $|H \cap K| \le 7^2 \times 11^3$ 이다.

한편 HK 는 G 의 부분집합이므로 $|HK| \le |G|$ 이고,

$$|H \cap K| = \frac{|H||K|}{|HK|} \ge \frac{|H||K|}{|G|} = \frac{7^3 \times 11^3 \times 7^3 \times 11^3}{6 \times 7^3 \times 11^3} > 7^2 \times 11^3$$

로 모순이다. H 는 위수가 $7^3 \times 11^3$ 인 유일한 부분군이므로 정규부분군이다.

10. 서술형 [4점]

$w_0 \in f(D)$ 이면 $\exists z_0 \in D$, $w_0 = f(z_0) = \lim_{n\to\infty} f_n(z_0)$ 이므로

$\forall \varepsilon > 0$. $\exists N \in \mathbb{N}$, $n \ge N$ 이면 $|w_0 - f_n(z_0)| < \varepsilon$ 이다.

$f_n(z_0) \in f(D) \subset D$ 이므로 $w_0 \in \bar{D}$ 이다. 즉 $f(D) \subset \bar{D} = D \cup \partial D$ 이다.

해석함수 f 가 상수함수가 아니라면 열린함수이다.

따라서 $f(D)$ 는 열린집합이고, $f(D) \subset D$ 이므로 문제의 조건 $f(D) \not\subset D$ 에 모순이다.

즉 f 는 상수함수이다.

패턴 영역 D 의 복소함수 $f = u + iv$ 가 상수함수임을 보이는 방법

1. 코시-리만 방정식: $u_x = u_y = 0$
2. Liouville의 정리: 유계 정함수
3. 항등정리: D 에 $f(z_n) =$ 상수 인 수렴하는 수열 $z_n \in D$ 존재
4. 최대절대값의 정리: $\exists z_0 \in D$, $|f(z_0)| = \max\{|f(z)| : z \in D\}$
5. 최소절대값의 정리: $\exists z_0 \in D$, $|f(z_0)| = \min\{|f(z)| : z \in D\} > 0$
6. 열린사상정리: $f(U)$ 가 열린집합이 아닌 열린집합 $U \subset D$ 존재

11. 서술형 [4점]

$A \in V$ 는 대칭행렬이므로 직교대각화 가능하다.

즉 $A = PDP^{-1}$ 을 만족하는 대각행렬 D 과 직교행렬 P 가 존재한다.

이 때 대각행렬 D 의 대각성분은 고유값 λ_i, $i = 1, 2, \ldots, n$ 이고,

D^2 의 대각성분은 λ_i^2, $i = 1, 2, \ldots, n$ 이다.

$A^2 = PDP^{-1}PDP^{-1} = PD^2P^{-1}$ 이므로

$$\begin{aligned}\operatorname{tr} A^2 &= \operatorname{tr}\left(PD^2P^{-1}\right) = \operatorname{tr}\left(PP^{-1}D^2\right) = \operatorname{tr}\left(PP^{-1}\right)\operatorname{tr}\left(D^2\right) = \operatorname{tr}\left(D^2\right) \\ &= \lambda_1^2 + \lambda_2^2 + \cdots + \lambda_n^2 = 0\end{aligned}$$

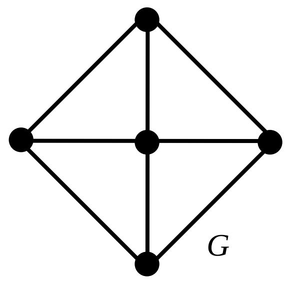
이다. 즉 모든 $\lambda_i = 0$ 이고 $A = \mathbf{0}$ 이다.

따라서 $V = \{\mathbf{0}\}$ 은 M_n 의 자명한 부분공간이고, $\dim V = 0$ 이다.

12. 서술형 [4점]

사각뿔은 평면그래프이다. 평면그래프의 면을 점으로 대응하고

인접한 면에 대응하는 점은 변으로 연결하여 새 그래프 G 를 얻을 수 있다.



사각뿔의 면의 채색문제는 그래프 G 의 꼭지점의 채색문제이고,
채색하는 방법의 수는 G 의 채색다항식

$$P(x) = x(x-1)(x-2)(x^2-5x+7)$$

이다.

✓ 전공 B

1. 수학교육론 기입형 [2점]

2. 기입형 [2점]

$f(0) = \dfrac{b}{d} = -\dfrac{6}{5}$ 이므로 $f(z) = \dfrac{az-6}{cz+5}$

$f\left(-\dfrac{5}{3}\right) = \dfrac{a\left(-\dfrac{5}{3}\right)-6}{c\left(-\dfrac{5}{3}\right)+5} = \infty$ 이므로 $c\left(-\dfrac{5}{3}\right)+5=0 \Rightarrow f(z) = \dfrac{az-6}{3z+5}$

$f(-1) = \dfrac{-a-6}{-3+5} = -1$ 이므로 $f(z) = \dfrac{-4z-6}{3z+5} \longleftrightarrow A = \begin{bmatrix} -4 & -6 \\ 3 & 5 \end{bmatrix}$

A 는 대각화 가능하고

$$A^3 = \begin{bmatrix} -1 & -2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2^3 & 0 \\ 0 & (-1)^3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -1 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -10 & -18 \\ 9 & 17 \end{bmatrix} \leftrightarrow f^3(z) = \frac{-10z-18}{9z+17}$$

이다.

패턴 선형분수변환의 집합은 합성함수를 이항연산으로 갖는 군이고,
$GL(2,\mathbb{C})$ 의 정규부분군 $\alpha I = \left\{ \begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \alpha \end{pmatrix} \middle| \alpha \in \mathbb{C},\ \alpha \neq 0 \right\}$ 이 법인
잉여군 $GL(2,\mathbb{C})/\alpha I$ 과 동형이다.

$$w = \frac{az+b}{cz+d} \xleftrightarrow[\text{무시하고}]{\text{스칼라곱은}} \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$$

3. 수학교육론 서술형 [4점]
4. 수학교육론 서술형 [4점]
5. 수학교육론 서술형 [4점]

6. 서술형 [4점]

f_n 은 $[0,x]$ 에서 연속이고, $(0,x)$ 에서 미분가능하므로 평균값정리에 의해서

$$f_n(x) = f_n(x) - f_n(0) = f_n{}'(c)(x-0) = \frac{\cos\sqrt{c+4n^2\pi^2}}{2\sqrt{c+4n^2\pi^2}}x$$

를 만족하는 $c \in (0,x)$ 가 존재한다.

$$|f_n(x)| = \frac{\left|\cos\sqrt{c+4n^2\pi^2}\right|}{2\sqrt{c+4n^2\pi^2}}x \le \frac{x}{2\sqrt{c+4n^2\pi^2}} \to 0$$

이므로 함수열 f_n 은 $f(x)=0$ 으로 점별수렴한다.

수열 $a_n = \dfrac{\pi^2}{4} + 2n\pi^2$ 에 대하여

$$f_n(a_n) = \sin\sqrt{a_n + 4n^2\pi^2} = \sin\sqrt{\left(\frac{\pi}{2}+2n\pi\right)^2} = \sin\left(\frac{\pi}{2}+2n\pi\right) = 1$$

이므로 함수열 f_n 은 $f(x)=0$ 으로 균등수렴하지 않는다.

7. 서술형 [4점]

만일 $|R^*| = 5$ 라면 R^* 는 위수가 5 인 순환군 $R^* = \langle a \rangle$ 이므로 위수가 2 인 원소는 존재하지 않는다. $-1 \ne 1$ 이면 모순이므로 $-1 = 1$ 이고 $\mathrm{char}\, R = 2$ 이다.

(대입) 준동형사상

$$\varphi : \mathbb{Z}_2[x] \to R,\ \varphi(g(x)) = g(a)$$

을 생각하자. $\mathbb{Z}_2[x]$ 는 주이데알 정역이므로 $\ker\varphi = \langle f(x) \rangle$ 이다.

$\varphi(x^5-1) = a^5 - 1 = 0$ 이므로 $x^5 - 1 \in \ker\varphi$ 이고,

$\ker\varphi$ 의 생성원 $f(x)$ 는 $x^5 - 1 = (x-1)(x^4+x^3+x^2+x+1)$ 의 약수이다.

$\varphi(x-1) = a - 1 \ne 0$ 이므로 $x - 1 \notin \ker\varphi$ 이고

$$\ker\varphi = \langle x^5 - 1 \rangle \text{ 또는 } \ker\varphi = \langle x^4+x^3+x^2+x+1 \rangle$$

이다. 제1동형사상정리에 의해서

$$\begin{aligned}\mathrm{Im}\,\varphi &\simeq \mathbb{Z}_2[x]/\ker\varphi \\ &\simeq \mathbb{Z}_2[x]/\langle x-1 \rangle \times \mathbb{Z}_2[x]/\langle x^4+x^3+x^2+x+1 \rangle \\ &\text{또는 } \mathbb{Z}_2[x]/\langle x^4+x^3+x^2+x+1 \rangle\end{aligned}$$

이다 따라서 환 R 은 위수가 2×2^4 또는 2^4 인 부분환을 갖고

$$|R^*| \ge 2^4 - 1 = 15$$

이다.

8. 서술형 [4점]

$343 = 7^3$ 이므로

$$x \in \mathbb{F}_{7^3}^{*} \Leftrightarrow x^{7^3-1} = x^{342} = 1$$

이다. $171 \times 2 = 342$ 이므로 $x^{171} - 1 \in \mathbb{Z}_7[x]$는 $\mathbb{F}_{7^3}$ 에서 분해된다.

$\mathbb{F}_{7^3} > L \gneqq \mathbb{Z}_7$ 이므로 확대체의 차수 $[L : \mathbb{Z}_7] \neq 1$은 $[\mathbb{F}_{7^3} : \mathbb{Z}_7] = 3$의 약수이다.

따라서 $L = \mathbb{F}_{7^3}$ 이고 Galois군은 위수가 $|\mathrm{Gal}(L/\mathbb{Z}_7)| = [\mathbb{F}_{7^3} : \mathbb{Z}_7] = 3$인

순환군 $\mathrm{Gal}(L/\mathbb{Z}_7) \cong \mathbb{Z}_3$이다.

9. 서술형 [4점]

p 가 $X = \mathbb{R} \cup \{p\}$의 고립점이 아니라면 p 로 수렴하는 실수열 $a_n \in \mathbb{R}$ 이 존재한다.

수렴하는 수열 a_n 은 코시 실수열이므로 a_n 은 실수에서 수렴한다.

수열 a_n 이 p 와 p 가 아닌 실수 두 점으로 수렴하므로 거리공간에 모순이고,

p 는 X 의 고립점이다.

10. 서술형 [4점]

$\alpha' \times \alpha'' = \mathbf{T} \times \kappa \mathbf{N} = \kappa \mathbf{B}$ 이고.

$\alpha' + \alpha''' = \mathbf{T} + (\kappa \mathbf{N}) = \mathbf{T} + (-\kappa^2 \mathbf{T} + \kappa' \mathbf{N} + \kappa\tau \mathbf{B}) = (1-\kappa^2)\mathbf{T} + \kappa'\mathbf{N} + \kappa\tau\mathbf{B}$

이므로 $\kappa = 1,\ \tau = 1$이다.

11. 서술형 [4점]

f 가 결합확률밀도함수라면

$$1 = \iint_{\mathbb{R}^2} f(x,y)\, dA = \int_0^1 \int_0^{x^2} a e^{\frac{y}{x}}\, dy\, dx = \frac{a}{2}$$

이므로 $a = 2$ 이다. 확률변수 X 의 주변확률분포는

$$f_X(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x,y)\, dy = \int_0^{x^2} 2e^{\frac{y}{x}}\, dy = 2x\left(e^x - 1\right)$$

이다. $X = 0.5$ 에 관한 Y 의 조건부확률밀도함수는

$$f_{Y|X}\left(y|0.5\right) = \frac{f(0.5, y)}{f_X(0.5)} = \frac{2e^{2y}}{e^{0.5} - 1}$$

이고,

$$E\left(Y | X = 0.5\right) = \int_{-\infty}^{\infty} y\ f_{Y|X}\left(y|0.5\right) dy = \int_0^{1/4} \frac{2ye^{2y}}{e^{0.5}-1}\, dy = \frac{2 - e^{0.5}}{-4 + 4e^{0.5}}$$

이다.